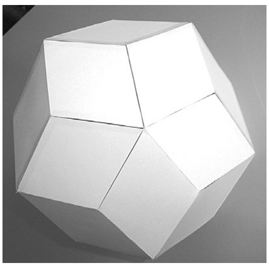
Rombski izoedri

Vladimir Volenec[1], *Zagreb*

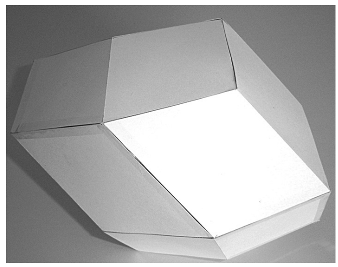
Ove godine je stota obljetnica rođenja akademika Stanka Bilinskog (o njegovom životu i radu pogledajte posljednju stranicu omota MFL-a br. 3 iz prethodnog godišta). Povodom te obljetnice prikazat ćemo ovdje rezultate njegovog rada: *Über die Rhombenisoeder*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski **15** (1960), 251–263.

Rombski izoedri su poliedri omeđeni međusobno sukladnim rombovima. Još je krajem 19. stoljeća takve poliedre temeljito istražio poznati ruski geometar i kristalograf E. S. Fedorov i ustvrdio da su svi takvi poliedri pronađeni i da su to:

— rombski triakontaedar, omeđen s 30 sukladnih rombova s jednim kutom α, gdje je α kut, kojeg tvore bilo koje dvije glavne prostorne dijagonale pravilnog ikozaedra, a jednak je otprilike $63°26'6''$ (slika 1),



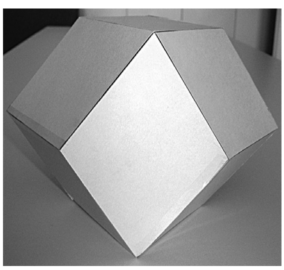
Slika 1.



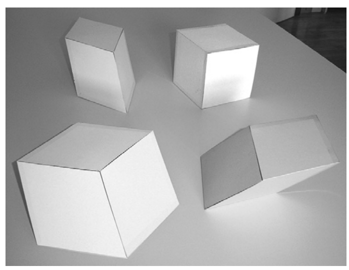
Slika 2.

— rombski ikozaedar, omeđen s 20 sukladnih rombova s jednim kutom α (slika 2),

— rombski dodekaedar, omeđen s 12 sukladnih rombova s jednim kutom β, gdje je β kut, kojeg tvore bilo koje dvije prostorne dijagonale kocke, a jednak je otprilike $70°31'44''$ (slika 3),



Slika 3.



Slika 4.

— rombski heksaedri, omeđeni sa 6 sukladnih rombova bilo kojeg oblika, pa je među takvim poliedrima npr. i kocka (slika 4).

Sam Fedorov je našao rombski ikozaedar, rombski heksaedri su poznati od davnih vremena, a otkriće rombskog dodekaedra i rombskog triakontaedra se najčešće pripisuje J. Kepleru. Međutim, rombski dodekaedar poznaje već L. Paciuolo stoljeće prije Keplera,

[1] Redoviti je profesor na Matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu.

a F. Lindemann je na temelju arheoloških nalaza otkrio da je rombski triakontaedar bio poznat još u helenističkom razdoblju u Maloj Aziji.

Podatak, da su gore pobrojani svi mogući rombski izoedri, preuzeli su od Fedorova mnogi drugi autori. Tek će S. Bilinski svojim radom iz 1960. godine pokazati da postoji još jedan rombski dodekaedar, metrički različit od onog već poznatog, tj. omeđen s 12 sukladnih rombova s jednim kutom α, te da su to konačno svi rombski izoedri. Ovaj rezultat profesora Bilinskog citira se u svakoj boljoj knjizi o poliedrima.

Rombski izoedri su specijalni slučajevi poliedara, omeđenih samim paralelogramima. Ti su poliedri centralno simetrični, a njihove strane, paralelogrami, tvore tzv. zone, u kojima dolaze sve one strane takvog jednog poliedra, koje imaju po jedan par bridova paralelnih i jednakih duljina s po jednim vektorom. Ako pođemo od bilo kojih n linearno nezavisnih vektora, tada dobivamo paralelogramski poliedar s n zona, koji je omeđen s ukupno $n(n-1)$ strana, jer se svake dvije zone sijeku u dva paralelograma na suprotnim stranama tog poliedra. U pojedinoj zoni ima tada $2(n-1)$ strana, a poliedar ima ukupno $2n(n-1)$ bridova i $n(n-1)+2$ vrhova. Pojedini poliedri ovog tipa imaju 3, 4, 5, 6, itd. zona, te ukupno 6, 12, 20, 30, itd. strana. Ukoliko jedan od polaznih vektora stegnemo u nul-vektor, tada poliedar gubi jednu zonu.

Zamijene li se u prethodnom razmatranju svi vektori jediničnim vektorima u istim smjerovima, dobiva se poliedar omeđen samim rombovima. Taj će poliedar biti rombski izoedar ako svi ovi jedinični vektori tvore međusobno jednake kutove, tj. ako su paralelni tzv. izogonalnom sistemu pravaca u prostoru. Ako se izogonalnom sistemu pravaca ne može dodati još jedan pravac tako da se dobije novi izogonalan sistem pravaca, tada se kaže da imamo potpuni izogonalan sistem pravaca.

U prostoru su (do na položaj) mogući samo ovi potpuni izogonalni sistemi pravaca:

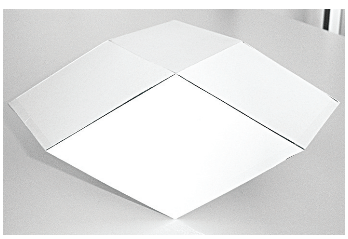
1° bilo koja tri pravca, od kojih svaka dva tvore kut γ, gdje je γ bilo koji kut različit od kutova α i β,

2° četiri pravca, koji su prostorne dijagonale neke kocke, tj. bilo koja dva od tih pravaca tvore kut β,

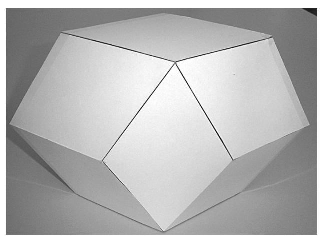
3° šest pravaca, koji su glavne prostorne dijagonale nekog pravilnog ikozaedra, tj. bilo koja dva od tih pravaca tvore kut α.

U slučaju izogonalnog sistema pravaca iz 1° dobiva se rombski heksaedar, a isto tako će se rombski heksaedri dobiti u slučaju da se pođe od bilo koja tri pravca iz sistema pod 2° ili pod 3°. Ako se pođe od tri međusobno okomita pravca, dobiva se kocka (slika 4, gore desno).

U slučaju izogonalnog sistema iz 2° dobiva se najprije rombski dodekaedar s kutom β (slika 3), a ispuštanjem jedne njegove zone dobiva se rombski heksaedar s istim tim kutom (slika 4, dolje desno).



Slika 5.



Slika 6.

U slučaju izogonalnog sistema iz 3° dobiva se najprije rombski triakontaedar s kutom α (slika 1), a ispuštanjem jedne njegove zone dobiva se rombski ikozaedar s istim tim kutom, poliedar, kojeg je našao Fedorov (slika 2). Ispuštanjem jedne zone ovog poliedra dobiva se rombski dodekaedar s kutom α, koji se metrički razlikuje od onog s kutom β, i koji je prije ovog rada profesora Bilinskog bio nepoznat (slike 5 i 6, načinjene na dva različita načina, tj. s poliedrom položenim na dvije različite strane). Tom se poliedru može ispustiti po jedna zona na dva različita načina i tako dobiti dva metrički različita rombska heksaedra s kutom α. Kod jednog od njih se kod dva suprotna vrha sastaju tri romba sa svojim tupim kutovima $\pi - \alpha$, a kod ostalih šest vrhova se sastaju po dva romba sa svojim šiljastim kutovima α i po jedan romb s kutom $\pi - \alpha$, pa je taj heksaedar "tanak" (slika 4, gore lijevo). Kod drugog od njih se kod dva suprotna vrha sastaju tri romba sa svojim šiljastim kutovima α, a kod ostalih šest vrhova se sastaju po dva romba sa svojim tupim kutovima $\pi - \alpha$ i po jedan romb s kutom α, pa je taj heksaear "debeo" (slika 4, dolje lijevo).